Übungen zu Mathematik III
Blatt 2

Aufgabe 1: Wir betrachten das elektrische Feld im Innern einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius $R > 0$:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{r}| \leq R$$

Bestimmen Sie die Divergenz dieses kugelsymmetrischen Vektorfeldes. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der entsprechenden Maxwell Gleichung, indem Sie die Ladungsdichte

$$\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}$$

verwenden.

Aufgabe 2: Wir betrachten das elektrische Feld im Innern einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius $R > 0$:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{r}| \leq R$$

Bestimmen Sie die Rotation dieses kugelsymmetrischen Vektrofeldes. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der entsprechenden Maxwell Gleichung der Elektrostatik.

Aufgabe 3: Wir betrachten das 2D Geschwindigkeitsfeld einer Strömung:

$$\vec{v}(x, y) = \frac{v_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Hierbei bezeichnet v_0 den konstanten Betrag der Geschwidnigkeit. Das Strömungsfeld wird in Abb. 1 gezeigt.

a) Entscheiden Sie an Hand von Abb. 1, ob die Divergenz von $\vec{v}$ größer als null, kleiner als null oder gleich null ist.

b) Berechnen Sie die Divergenz und verifizieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 4: Wir betrachten das 2D Geschwindigkeitsfeld einer Strömung:

$$\vec{v}(x, y) = \frac{v_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hierbei bezeichnet v_0 den konstanten Betrag der Geschwidnigkeit. Das Strömungsfeld wird in Abb. 2 gezeigt.

a) Entscheiden Sie an Hand von Abb. 2, ob die Rotation von $\vec{v}$ verschwindet oder ungleich null ist.

b) Berechnen Sie die Rotation und verifizieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Divergenz und Rotation des folgenden Vektorfeldes:

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Kann $\vec{F}$ als Wirbelfeld geschrieben werden, d.h. existiert ein Vektorfeld $\vec{E}$ mit $\vec{F} = \mathrm{rot}\vec{E}$? Oder existiert ein Potenzial φ mit $\vec{F} = \nabla\varphi$? Wo besitzt das Vektorfeld Quellen und Senken, wo ist es quellfrei?

Aufgabe 6: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld und $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Wir nehmen an, dass die Funktionen zusammen mit allen partiellen Ableitungen stetig sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten gelten, indem Sie die Ausdrücke berechnen:

a) $\mathrm{rot}\,\nabla f = \vec{0}$

b) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$

Zusatzaufgabe 7: Wir betrachten die sogenannte Laplace-Gleichung im $\mathbb{R}^m$ für $m = 2, 3$, die z.B. in der Elektrostatik das elektrische Potential oder in der Thermodynamik stationäre Wärmeverteilungen beschreibt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \,.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{bzw.} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Lösungen der Laplace-Gleichung sind, indem Sie die Funktionen zweimal ableiten und oben in die partielle Differentialgleichung einsetzen.

Zusatzufgabe 8: Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

die sogenannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt. Wie können wir diese Lösung physikalisch interpretieren? Welche Bedeutung hat der Parameter c?

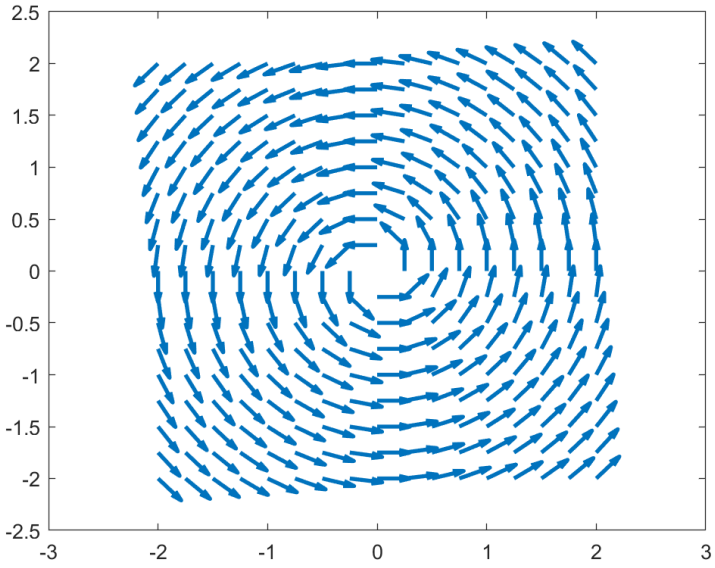


Abbildung 1: Strömungsfeld zu Aufgabe 3.

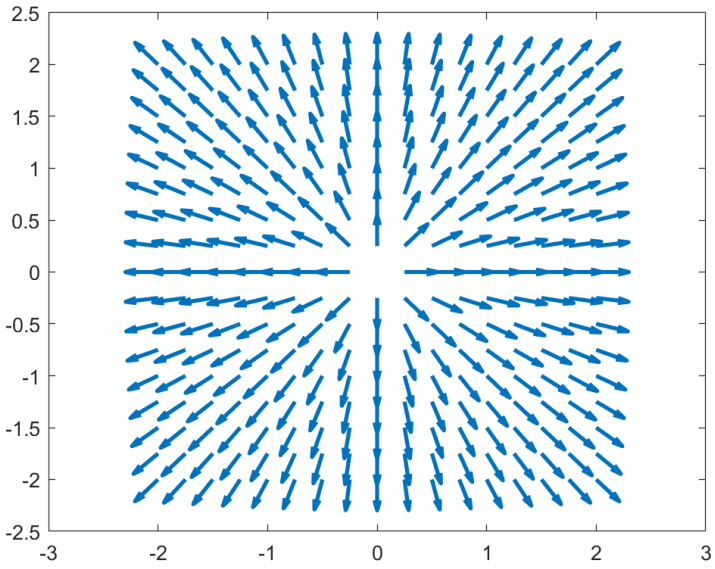


Abbildung 2: Strömungsfeld zu Aufgabe 4.